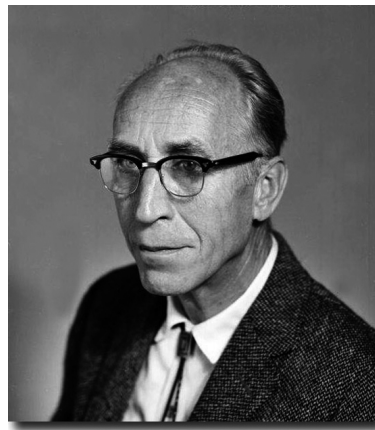


Chapitre 13

Thermodynamique des milieux continus



Carl Henry Eckart, 1902-1973



13.1 Equations de continuité

- 13.1.1 Introduction historique
- 13.1.2 Système global et système local
- 13.1.3 Lien entre système global et système local
- 13.1.4 Equation de bilan
- 13.1.5 Densité de courant
- 13.1.5 Courant
- 13.1.7 Equations de continuité
- 13.1.6 Divergence

13.2 Thermodynamique d'un milieu continu

- 13.2.1 Champs d'état et fonctions de champs d'état
- 13.2.2 Densités de source
- 13.2.3 Equations de continuité des champs d'état
- 13.2.4 Théorème du centre de masse
- 13.2.5 Puissance mécanique
- 13.2.6 Equation de continuité de l'énergie
- 13.2.7 Densités de courant

13.3 Irréversibilité en thermodynamique des milieux continus

- 13.3.1 Loi de Fourier
- 13.3.2 Loi de Fick
- 13.3.3 Loi d'Ohm
- 13.3.4 Loi de Stokes
- 13.3.5 Dissipation chimique
- 13.3.6 Densité de source d'entropie

13.4 Applications

- 13.4.1 Force d'Archimède
- 13.4.2 Accéléromètre

13.1 Equations de continuité

- 13.1.1 Introduction historique
- 13.1.2 Système global et système local
- 13.1.3 Lien entre système global et système local
- 13.1.4 Equation de bilan
- 13.1.5 Densité de courant
- 13.1.5 Courant
- 13.1.7 Equations de continuité
- 13.1.6 Divergence

- **Thermodynamique avant Eckart et Stückelberg**

Avant 1940-1950 :

- 1 **Thermostatique** : états d'équilibre
- 2 **Quasi-thermostatique** : processus entre des états d'équilibre

- **Thermodynamique depuis Stückelberg**

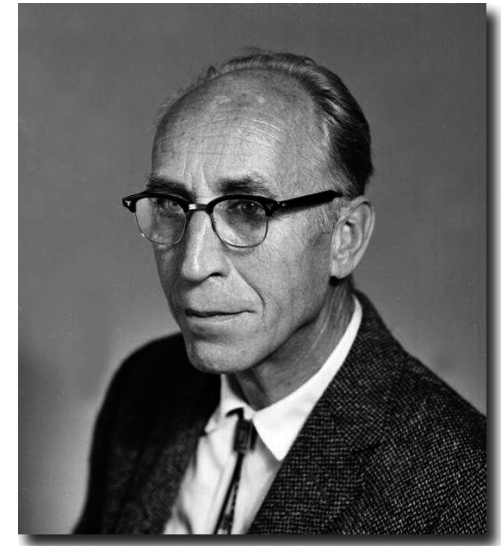
Après 1950 :

- 1 **Thermodynamique** : évolution temporelle des états
- 2 **Equations de continuité** : description en termes d'équations différentielles locales

- **Feynman** 🏆 à propos de **Stückelberg** 🏆🏆🏆

Cern 1965 :

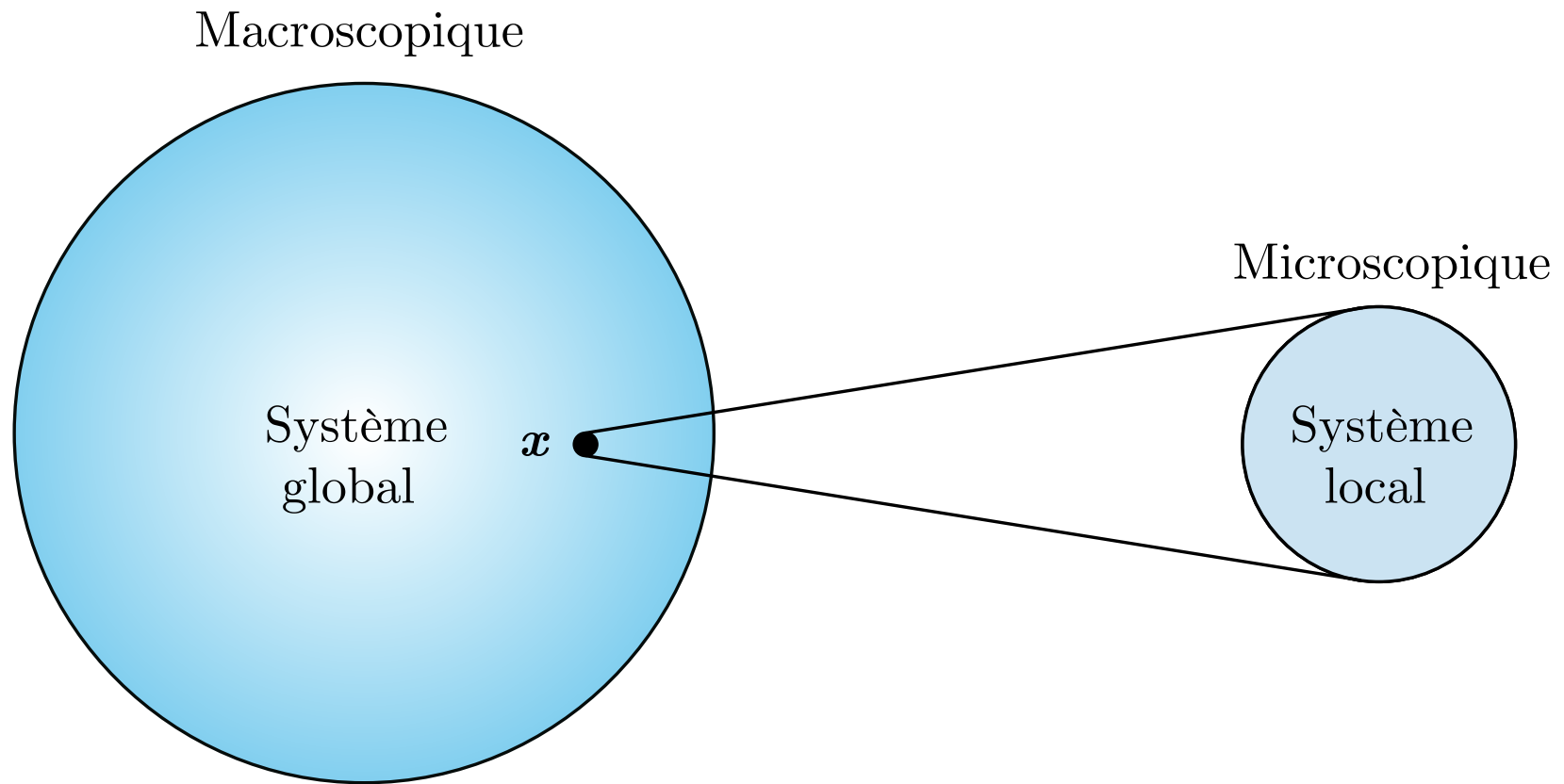
“He did the work and walks alone toward the sunset ; and, here I am, covered in all the glory, which rightfully should be his.”



Eckart



Stückelberg



- **Système global :**

- 1 Milieu continu de points $\{x\}$
- 2 Inéquilibre
- 3 Inhomogène
- 4 Non-uniforme

- **Système local :**

- 1 Point x
- 2 Equilibre
- 3 Homogène
- 4 Uniforme

- **Système global :**

- ① **Variable d'état extensive dynamique :** quantité de mouvement $\mathbf{P}(t)$
- ② **Variable d'état extensive thermique :** entropie $S(t)$
- ③ **Variable d'état extensive mécanique :** volume $V(t)$
- ④ **Variables d'état extensives chimiques :** nombres de moles $\{N_A(t)\}$
- ⑤ **Variable d'état extensive électrique :** charge électrique $Q(t)$
- ⑥ **Fonction d'état :**

(13.1)

- **Système local :**

- ① **Champ d'état densitaire dynamique :** densité de quant. de mvt $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$
- ② **Champ d'état densitaire thermique :** densité d'entropie $s(\mathbf{x}, t)$
- ③ **Champs d'état densitaires chimiques :** densités molaires $\{n_A(\mathbf{x}, t)\}$
- ④ **Champ d'état densitaire électrique :** dens. de charge électrique $q(\mathbf{x}, t)$
- ⑤ **Densité de fonction d'état :**

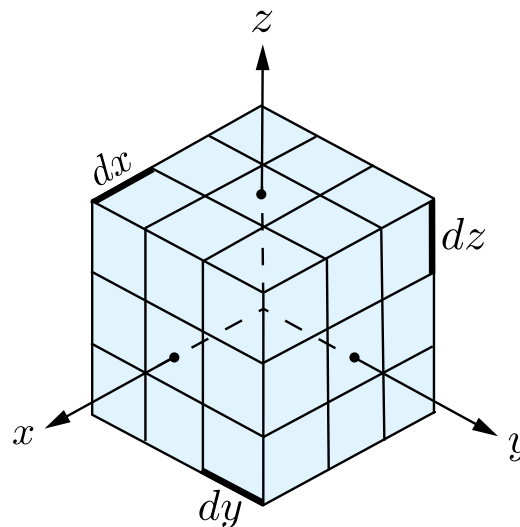
(13.2)

- ① **Variable d'état extensive dynamique** : quantité de mouvement : (13.3)
- ② **Variable d'état extensive thermique** : entropie : (13.4)
- ③ **Variables d'état extensives chimiques** : nombre de moles (13.5)
- ④ **Variable d'état extensive électrique** : charge électrique (13.6)
- ⑤ **Fonctions d'état extensives scalaires** : (13.7)

- **Fonction d'état extensive scalaire** : coordonnées cartésiennes du centre $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ et volume $dV(\boldsymbol{x}) = dx dy dz$ de cubes infinitésimaux
- (13.8)

- **Dérivée temporelle de la fonction d'état extensive scalaire** : (13.9)

- **Equation de bilan** : fonction d'état extensive scalaire
- (1.12)

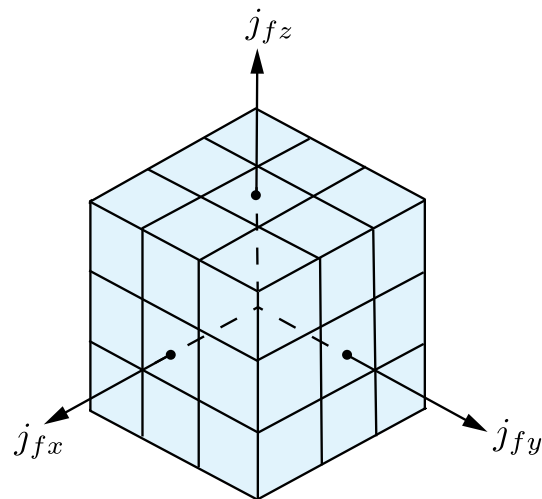


- ① **Source de fonction d'état extensive scalaire** : à l'intérieur du système de volume $V(t)$

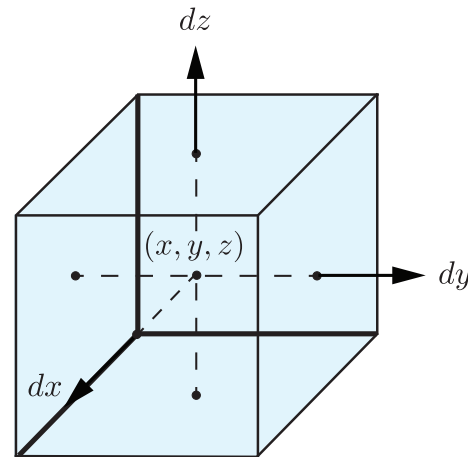
(13.10)

- ② **Courant de la fonction extensive scalaire** : à travers la surface $S(t)$ de l'enceinte du système par rapport à un référentiel d'inertie immobile

(13.11)



- ❶ **Système infinitésimal** : cube fixe de volume $dx\,dy\,dz$ centré en (x, y, z)



- **Densité de courant** : entrant à l'arrière et sortant à l'avant

(13.12)

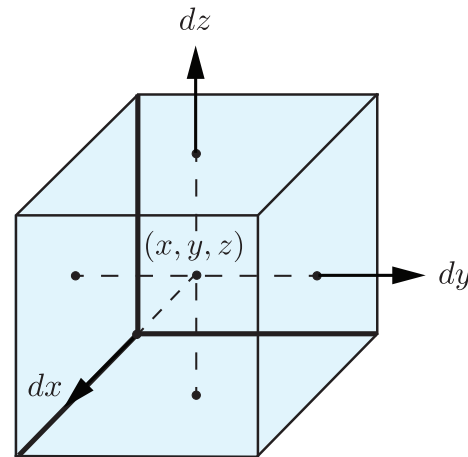
- **Développement limité** : au 1^{er} ordre

(13.13)

- **Densité de courant** : (13 :13) dans (13.12)

(13.14)

- 2 **Système infinitésimal** : cube fixe de volume $dx\,dy\,dz$ centré en (x, y, z)



- **Densité de courant** : entrant à gauche et sortant à droite

(13.15)

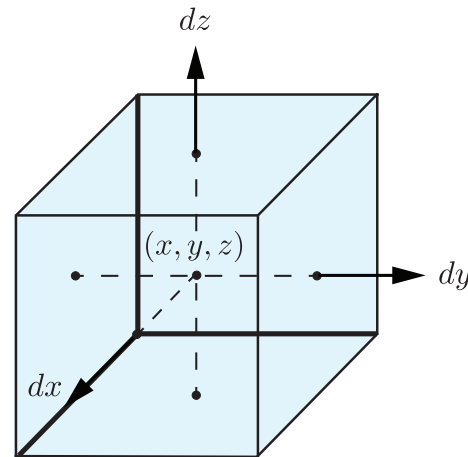
- **Développement limité** : au 1^{er} ordre

(13.16)

- **Densité de courant** : (13.16) dans (13.15)

(13.17)

- 3 **Système infinitésimal** : cube fixe de volume $dx\,dy\,dz$ centré en (x, y, z)



- **Densité de courant** : entrant en bas et sortant en haut

(13.18)

- **Développement limité** : au 1^{er} ordre

(13.19)

- **Densité de courant** : (13 :19) dans (13.18)

(13.20)

- **Courant de la fonction extensive scalaire** : à travers l'enceinte du système de surface $S(t)$

$$I_F(t) = \int_{S(t)} j_{fx}(x, y, z, t) dy dz + \int_{S(t)} j_{fy}(x, y, z, t) dz dx + \int_{S(t)} j_{fz}(x, y, z, t) dx dy \quad (13.11)$$

- **Densité de courant** : composantes cartésiennes

$$j_{fx}(x, y, z, t) = - \frac{\partial j_{fx}(x, y, z, t)}{\partial x} dx \quad (13.14)$$

$$j_{fy}(x, y, z, t) = - \frac{\partial j_{fy}(x, y, z, t)}{\partial y} dy \quad (13.17)$$

$$j_{fz}(x, y, z, t) = - \frac{\partial j_{fz}(x, y, z, t)}{\partial z} dz \quad (13.20)$$

- **Vecteur densité de courant** : représentation cartésienne

$$\mathbf{j}_f(x, y, z, t) = \left(j_{fx}(x, y, z, t), j_{fy}(x, y, z, t), j_{fz}(x, y, z, t) \right) \quad (13.21)$$

- **Courant de la fonction extensive scalaire** : (13.14), (13.17) et (13.20) dans (13.11) : intégrale sur le volume

(13.22)

- **Opérateur vectoriel gradient** : représentation cartésienne

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (13.23)$$

- **Divergence de la densité de courant** : scalaire

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{j}_f(x, y, z) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} j_{fx}(x, y, z) \\ j_{fy}(x, y, z) \\ j_{fz}(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial j_{fx}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial j_{fy}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial j_{fz}(x, y, z)}{\partial z} \\ &\equiv \partial_x j_{fx}(x, y, z) + \partial_y j_{fy}(x, y, z) + \partial_z j_{fz}(x, y, z) \end{aligned} \quad (13.24)$$

- **Equation de bilan** : fonction d'état extensive scalaire

$$\dot{F}(t) = I_F(t) + \Sigma_F(t) \quad (1.12)$$

- **Dérivée temporelle de la fonction d'état extensive scalaire** :

$$\dot{F}(t) = \int_{V(t)} \partial_t f(x, y, z, t) dx dy dz \quad (13.9)$$

- **Source de fonction d'état extensive scalaire** :

$$\Sigma_F(t) = \int_{V(t)} \sigma_f(x, y, z, t) dx dy dz \quad (13.10)$$

- **Courant de la fonction extensive scalaire** : (13.24) dans (13.22)

$$(13.25)$$

- **Equation de bilan** :

$$(13.26)$$

- **Equation de bilan** : fonction d'état extensive scalaire

$$\dot{F}(t) = I_F(t) + \Sigma_F(t) \quad (1.12)$$

- **Equation de bilan** :

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} \partial_t f(x, y, z, t) dx dy dz = & - \int_{V(t)} \nabla \cdot \mathbf{j}_f(x, y, z, t) dx dy dz \\ & + \int_{V(t)} \sigma_f(x, y, z, t) dx dy dz \end{aligned} \quad (13.26)$$

- **Equation de continuité** : équation de bilan local en (x, y, z)

$$(13.27)$$

L'équation de continuité (13.26) décrit l'évolution temporelle et spatiale de la densité de fonction d'état scalaire $f(x, y, z, t)$ autour du point (x, y, z) au temps t par rapport à un référentiel d'inertie immobile.

- **Divergences de champs vectoriels : symétrie sphérique**

- 1 **Champ gravitationnel** : terre homogène de masse volumique $\rho > 0$

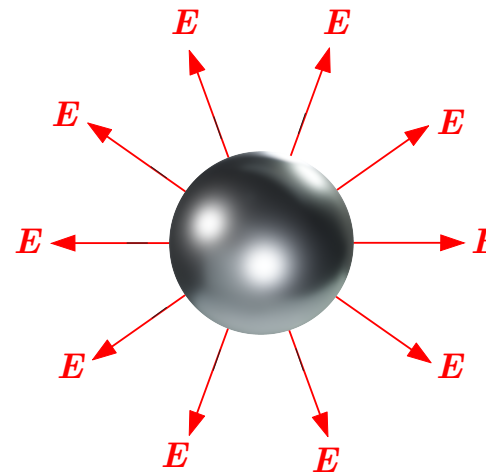
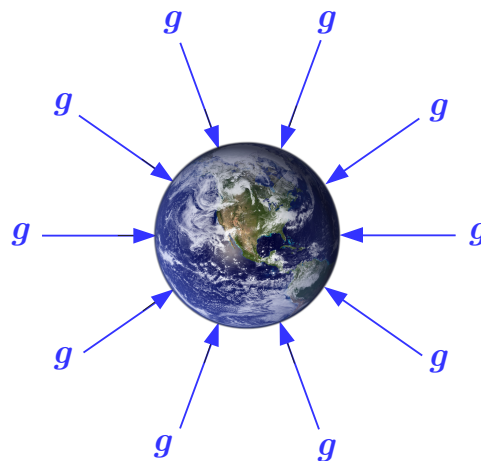
$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \rho < 0$$

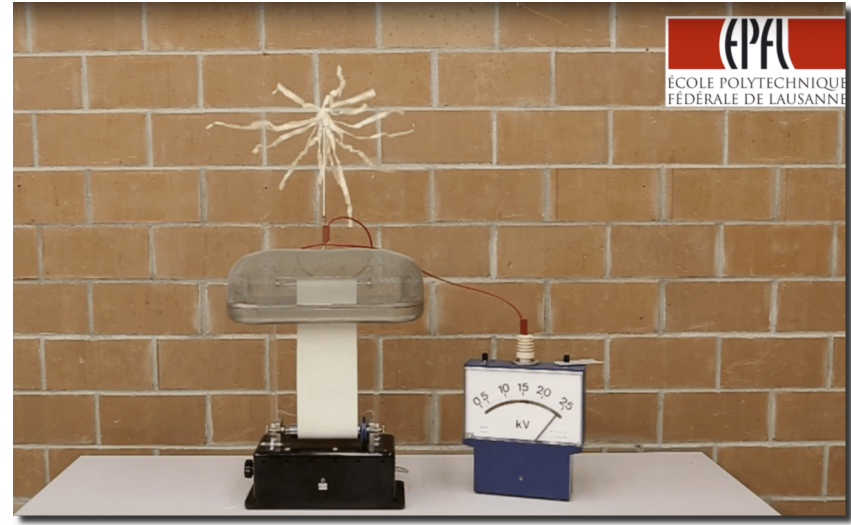
Divergence négative : les vecteurs champ gravitationnel $\mathbf{g}$ convergent vers la terre.

- 2 **Champ électrique** : sphère métallique de densité de charge $q > 0$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon_0} > 0$$

Divergence positive : les vecteurs champ électrique $\mathbf{E}$ divergent de la sphère dans le vide de permittivité électrique ε_0 .





- 1 Par contact avec une sphère électriquement chargée, la tension électrique $\Delta\varphi$ entre la tête de la fille et l'air ambiant fait se dresser ses cheveux. Les cheveux s'alignent radialement selon les vecteurs champ électrique $\mathbf{E}$ orientés radialement.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon_0} > 0$$

- 2 Les ruban de papier s'alignent radialement selon les lignes de champ électrique $\mathbf{E}$ à cause de la tension électrique $\Delta\varphi$ entre la baguette métallique et l'air ambiant.

- **Vitesse** : mouvement rectiligne selon l'axe des abscisses

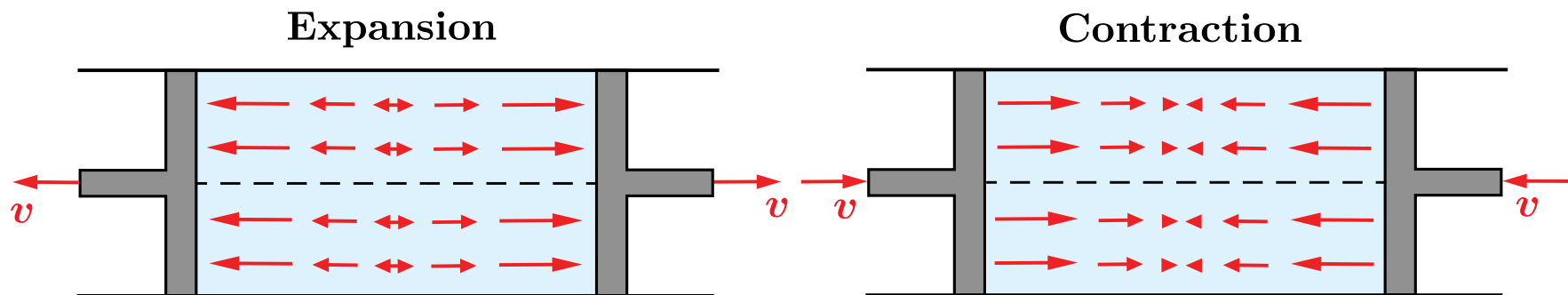
$$\mathbf{v}(x) = v_x(x) \hat{\mathbf{x}}$$

- 1 **Expansion** : divergence positive

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(x) = \frac{dv_x(x)}{dx} > 0$$

- 2 **Contraction** : divergence négative

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(x) = \frac{dv_x(x)}{dx} < 0$$



- **Densité de fonction d'état vectorielle** : représentation cartésienne

$$\mathbf{f}(x, y, z, t) = \left(f_x(x, y, z, t), f_y(x, y, z, t), f_z(x, y, z, t) \right) \quad (13.28)$$

- **Equations de continuités** : composantes cartésienne de $\mathbf{f}(x, y, z, t)$

$$(13.29)$$

$$(13.30)$$

$$(13.31)$$

- **Densité de source vectorielle** : représentation cartésienne

$$\boldsymbol{\sigma}_f(x, y, z, t) = \left(\sigma_{fx}(x, y, z, t), \sigma_{fy}(x, y, z, t), \sigma_{fz}(x, y, z, t) \right) \quad (13.32)$$

- **Densité de courant tensorielle** : représentation cartésienne

$$\mathbf{j}_f(x, y, z, t) = \left(\mathbf{j}_{fx}(x, y, z, t), \mathbf{j}_{fy}(x, y, z, t), \mathbf{j}_{fz}(x, y, z, t) \right) \quad (13.33)$$

- **Equation de continuité** : fonction d'état scalaire $F(t)$

$$\partial_t f(x, y, z, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}_f(x, y, z, t) = \sigma_f(x, y, z, t) \quad (13.27)$$

- **Equation de continuité** : fonction d'état vectorielle $\mathbf{F}(t)$

$$(13.34)$$

- **Densité de courant tensorielle** : représentation cartésienne (13.35)

$$\mathbf{j}_f(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} j_{fxx}(x, y, z, t) & j_{fxy}(x, y, z, t) & j_{fxz}(x, y, z, t) \\ j_{fyx}(x, y, z, t) & j_{fyy}(x, y, z, t) & j_{fyz}(x, y, z, t) \\ j_{fzx}(x, y, z, t) & j_{fzy}(x, y, z, t) & j_{fzz}(x, y, z, t) \end{pmatrix}$$

- **Divergence vectorielle de densité de courant tensorielle** : (13.36)

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} j_{fxx} & j_{fxy} & j_{fxz} \\ j_{fyx} & j_{fyy} & j_{fyz} \\ j_{fzx} & j_{fzy} & j_{fzz} \end{pmatrix} = (\dots, \dots, \dots)$$

13.2 Thermodynamique d'un milieu continu

- 13.2.1 Champs d'état et fonctions de champs d'état
- 13.2.2 Densités de source
- 13.2.3 Equations de continuité des champs d'état
- 13.2.4 Théorème du centre de masse
- 13.2.5 Puissance mécanique
- 13.2.6 Equation de continuité de l'énergie
- 13.2.7 Densités de courant

- **Système thermodynamique** : milieu continu constitué de r substances chimiques électriquement chargées liées par n réactions chimiques en mouvement.
- **Champs d'état** :
 - ① $\mathbf{p}(x, y, z, t)$: densité de quantité de mouvement
 - ② $s(x, y, z, t)$: densité d'entropie
 - ③ $\{n_A(x, y, z, t)\}$: densités de substances chimiques où $A = 1, \dots, r$
 - ④ $q(x, y, z, t)$: densité de charge électrique
- **Fonctions de champs d'état** :
 - ① $\mathbf{v}(\mathbf{p}, s, \{n_A\}, q)$: vitesse
 - ② $e(\mathbf{p}, s, \{n_A\}, q)$: densité d'énergie
 - ③ $m(s, \{n_A\}, q)$: densité de masse
 - ④ $u(s, \{n_A\}, q)$: densité d'énergie interne

1 Quantité de mouvement : premier principe (translation)

- **Source** : forces extérieures

$$\Sigma_P = \sum F^{\text{ext}} \quad (1.20)$$

- **Densité de source** : densités de forces extérieures

$$(13.37)$$

2 Entropie : deuxième principe (évolution)

- **Source** : non négative

$$\Sigma_S \geq 0 \quad (2.1)$$

- **Densité de source** : non négative

$$(13.38)$$

3 Quantité de substance A : réactions chimiques $a = 1, \dots, n$

- **Source** : réactions chimiques de vitesse Ω_a

$$\Sigma_A = \sum_{a=1}^n \Omega_a \nu_{aA} \quad (8.16)$$

- **Densité de source** : réactions chimiques de densité de vitesse ω_a

$$(13.39)$$

4 Charge électrique :

- **Source** : loi de conservation

$$\Sigma_Q = 0 \quad (8.40)$$

- **Densité de source** : loi de conservation

$$(13.41)$$

- **Equations de continuités :**

$$\partial_t f + \nabla \cdot \mathbf{j}_f = \sigma_f \quad (\text{fonction d'état scalaire}) \quad (13.27)$$

$$\partial_t \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{j}_f = \boldsymbol{\sigma}_f \quad (\text{fonction d'état vectorielle}) \quad (13.34)$$

- 1 **Quantité de mouvement :** $f \equiv p : \sigma_p = \sum f^{\text{ext}}$

$$(13.46)$$

- 2 **Entropie :** $f \equiv s : \sigma_s \geq 0$

$$(13.47)$$

- 3 **Quantité de substance chimique A :** $f \equiv n_A : \sigma_A = \sum_{a=1}^n \omega_a \nu_{aA}$

$$(13.48)$$

- 4 **Charge électrique :** $f \equiv q : \sigma_q = 0$

$$(13.49)$$

- **Quantité de mouvement** : équation de continuité

$$\partial_t \mathbf{p} + \nabla \cdot \mathbf{j}_p = \sum \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (13.46)$$

- **Densité de quantité de mouvement** :

$$(13.50)$$

- **Quantité de mouvement** : équation de continuité (13.50) dans (13.46)

$$(13.51)$$

- **Densité de courant et tenseur des contraintes** :

$$(13.52)$$

- **Densité de courant** : représentation cartésienne (13.53)

$$\begin{pmatrix} \dot{j}_{p_{xx}} & \dot{j}_{p_{xy}} & \dot{j}_{p_{xz}} \\ \dot{j}_{p_{yx}} & \dot{j}_{p_{yy}} & \dot{j}_{p_{yz}} \\ \dot{j}_{p_{zx}} & \dot{j}_{p_{zy}} & \dot{j}_{p_{zz}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m v_x v_x - \tau_{xx} & m v_x v_y - \tau_{xy} & m v_x v_z - \tau_{xz} \\ m v_y v_x - \tau_{yx} & m v_y v_y - \tau_{yy} & m v_y v_z - \tau_{yz} \\ m v_z v_x - \tau_{zx} & m v_z v_y - \tau_{zy} & m v_z v_z - \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

- **Densité de courant de quantité de mouvement :**

$$\dot{j}_p \equiv p \mathbf{v} - \boldsymbol{\tau} = m \mathbf{v} \mathbf{v} - \boldsymbol{\tau} \quad (13.52)$$

- **Règle de Leibnitz :** divergence d'un produit de vecteurs

$$(13.54)$$

- **Divergence vectorielle de la densité de courant :** (13.52) et (13.54)

$$(13.55)$$

- **Quantité de mouvement :** équation de continuité

$$m \partial_t \mathbf{v} + (\partial_t m) \mathbf{v} + \nabla \cdot \dot{j}_p = \sum \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (13.51)$$

- **Quantité de mouvement :** équation de continuité (13.55) dans (13.51)

$$(13.56)$$

Le tenseurs des contraintes $\boldsymbol{\tau}$ est défini dans le référentiel local du fluide. L'équation de continuité (13.56) doit être étudiée dans ce référentiel.

- **Equation d'évolution** : référentiel d'inertie immobile

$$m (\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \left(\partial_t m + \nabla \cdot (m \mathbf{v}) \right) \mathbf{v} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \sum \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (13.56)$$

- **Dérivée temporelle de la vitesse** : référentiel local du fluide

$$(13.57)$$

- **Equation d'évolution** : référentiel local du fluide

$$(13.58)$$

Cette équation d'évolution doit être valide par rapport à tous les référentiels d'inertie. Elle doit donc être indépendante de la vitesse $\mathbf{v}$ ce qui donne l'équation de continuité de la masse.

- **Masse** : équation de continuité : absence de densité de source

$$(13.59)$$

- **Théorème du centre de masse** : (13.59) et (13.57) dans (13.56)

$$(13.60)$$

La divergence du tenseur des contraintes $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ est une densité de force due à la déformation du système local infinitésimal par les systèmes locaux voisins.

- **Tenseur des contraintes** : symétrique

$$(13.61)$$

où $\mathbb{1}$ est le tenseur identité représenté par la matrice identité.

- 1 **Pression** : $p \mathbb{1}$: expansion et contraction réversibles
changement de volume sans changement de forme
- 2 **Frottement interne scalaire** : $\tau \mathbb{1}$: expansion et contraction irréversibles
changement de volume sans changement de forme
- 3 **Frottement interne tensoriel** : $\boldsymbol{\tau}'$: cisaillement irréversible
changement de forme sans changement de volume

- **Tenseur des contraintes** : symétrique

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau - p) \mathbb{1} + \boldsymbol{\tau}' \quad (13.61)$$

- ① **Pression** : $p \mathbb{1}$: expansion et contraction réversibles
changement de volume sans changement de forme
- ② **Frottement interne scalaire** : $\tau \mathbb{1}$: expansion et contraction irréversibles
changement de volume sans changement de forme : $\tau = \frac{1}{3} \text{tr} (\boldsymbol{\tau} + p \mathbb{1})$
- ③ **Frottement interne tensoriel** : $\boldsymbol{\tau}'$: cisaillement irréversible
changement de forme sans changement de volume : $\text{tr} \boldsymbol{\tau}' = 0$

- **Tenseur des contraintes** : représentation cartésienne (13.62)

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau - p + \tau'_{xx} & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \tau - p + \tau'_{yy} & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \tau - p + \tau'_{zz} \end{pmatrix}$$

- **Tenseur des contraintes** : sans frottement

$$(\text{réversible}) \quad (13.63)$$

- **Théorème du centre de masse** : (13.61) dans (13.60)

$$(13.64)$$

La divergence du tenseur de frottement $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}'$ permet de rendre compte de la viscosité dans l'équation fondamentale de la mécanique des fluides appelée équation de Navier-Stokes (chapitre 14).

- **Théorème du centre de masse** : sans frottement : $\boldsymbol{\tau} = 0$ et $\boldsymbol{\tau}' = 0$

$$\text{(réversible)} \quad (13.65)$$

Le gradient de pression $-\nabla p$ permet de rendre compte de la force exercée par une colonne de liquide en hydrostatique : il est à la base de la force d'Archimède (application du chapitre 13). Il apparaît également en hydrodynamique dans le théorème de Bernoulli et permet de rendre compte de l'effet Venturi (chapitre 14).

- **Dérivée temporelle du volume** : démontré en exercice

(13.66)

- **Puissance mécanique** : déformation réversible homogène

(réversible) (13.67)

- **Puissance mécanique** : trace du produit matriciel

(réversible) (13.68)

- **Tenseur des contraintes** : symétrique

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau - p) \mathbb{1} + \boldsymbol{\tau}' \quad (\text{irréversible}) \quad (13.61)$$

- **Puissance mécanique** : déformation irréversible non-homogène

(irréversible) (13.69)

- **Puissance mécanique** : déformation réversible

(13.68)

- **Densité de puissance mécanique** : représentation cartésienne

$$\begin{aligned}
 - (p \mathbb{1}) : (\nabla \mathbf{v}) &= - \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} (v_x, v_y, v_z) \right) \right) \\
 &= - \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \right) \\
 &= -p \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
 &= -p \nabla \cdot \mathbf{v}
 \end{aligned}$$

- **Equation de continuité :**

$$\partial_t f + \nabla \cdot \mathbf{j}_f = \sigma_f \quad (\text{fonction d'état scalaire}) \quad (13.27)$$

- **Energie et énergie interne : premier principe**

- **Source :** puissance due aux forces extérieures (1.49) donne (13.69)

$$\Sigma_E = P^{\text{ext}} = \sum \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \Sigma_U = P_W = \int_{V(t)} \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \, dx \, dy \, dz$$

- **Densité de source :** densités de puissance extérieure et mécanique

$$(13.70)$$

- **Equation de continuité de l'énergie : $f \equiv e$**

$$(13.71)$$

- **Equation de continuité de l'énergie interne : $f \equiv u$**

$$(13.72)$$

- Densité de source d'énergie interne :

$$(13.70)$$

- Densité de source d'énergie interne : représentation cartésienne

$$\begin{aligned}
 \tau : (\nabla \mathbf{v}) &= \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \end{pmatrix} (v_x, v_y, v_z) \right) \quad (13.73) \\
 &= \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \tau - p + \tau'_{xx} & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \tau - p + \tau'_{yy} & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \tau - p + \tau'_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \right) \\
 &= (\tau - p) \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
 &\quad + \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \tau'_{xx} & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \tau'_{yy} & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \tau'_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \right) \\
 &= (\tau - p) \nabla \cdot \mathbf{v} + \tau' : (\nabla \mathbf{v})
 \end{aligned}$$

- **Courant d'énergie interne :**

$$I_U(t) = I_Q(t) + I_C(t) \quad (1.50)$$

- **Courant d'énergie interne :** (13.25)

$$(13.74)$$

- **Courant de chaleur :** (13.25)

$$(13.75)$$

- **Courant de chaleur :** température homogène : $T(t) = T(x, y, z, t)$

$$(13.76)$$

- **Densité de courant de chaleur :** (13.75) et (13.76)

$$(13.77)$$

- Courant énergétique de matière : (13.25)

(13.78)

- Courant énergétique de matière : $\bar{\mu}_A(t) = \bar{\mu}_A(x, y, z, t)$

(13.79)

- Densité de courant énergétique de matière : (13.78) et (13.79)

(13.80)

- Densité de courant d'énergie interne :

(13.81)

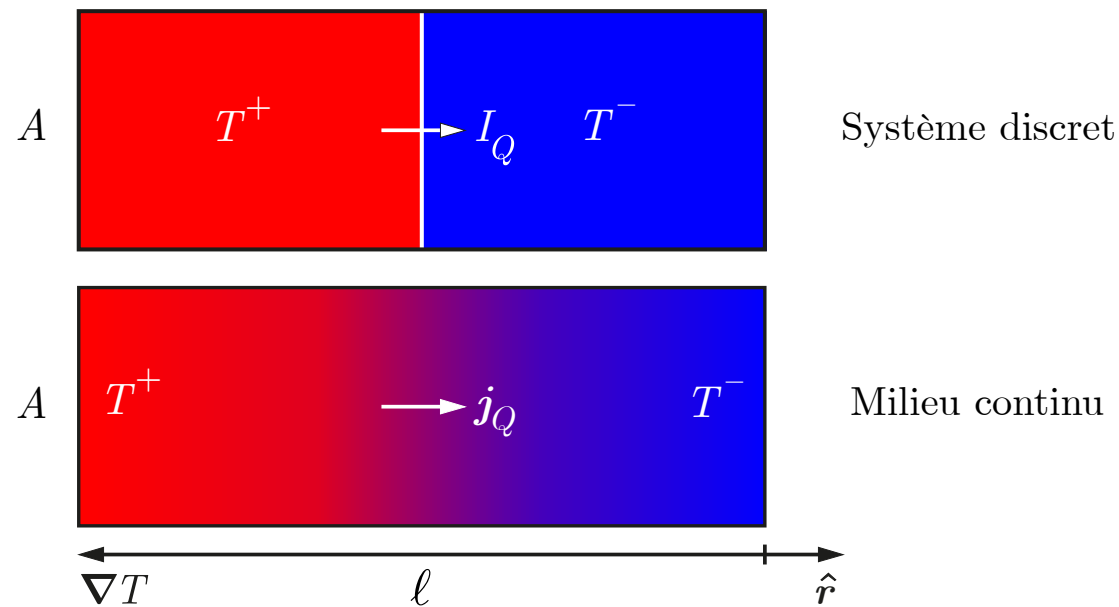
13.3 Irréversibilité en thermodynamique des milieux continus

- 13.3.1 Loi de Fourier
- 13.3.2 Loi de Fick
- 13.3.3 Loi d'Ohm
- 13.3.4 Loi de Stokes
- 13.3.5 Dissipation chimique
- 13.3.6 Densité de source d'entropie

- **Démarche** : on déduit la loi de Fourier pour un milieu continu en se basant sur la loi de Fourier (3.22) pour des sous-systèmes discrets.
- **Système** : deux sous-systèmes simples aux températures T^+ et T^- séparés par une paroi diatherme, immobile et imperméable.
- **Loi de Fourier** :

(3.22)

- ① Coefficient de conductivité thermique : κ
- ② Aire de la paroi : A
- ③ Epaisseur de la paroi : ℓ
- **Formulation continue** : on considère que le système est inhomogène et que la température varie continument et linéairement de la température maximale T^+ à gauche à la température minimale T^- à droite. Soit ℓ la longueur entre les deux extrémités du système et $\hat{r}$ le vecteur unitaire orienté de gauche à droite.



- **Gradient de température** : orienté sens croissant de T

(13.82)

- **Densité de courant de chaleur** : orienté sens décroissant de T

(13.83)

- **Loi de Fourier** : continue (3.22) et (13.82) dans (13.83)

(12.84)

- **Températures voisines** : $T^+ - T^- \ll T$

(13.85)

- **Source d'entropie** : (13.85) dans (3.22)

(13.86)

- **Densité de courant d'entropie** : orienté sens décroissant de T

(13.87)

- **Gradient de température** : orienté sens croissant de T

$$\nabla T = - \frac{T^+ - T^-}{\ell} \hat{\mathbf{r}} \quad (13.82)$$

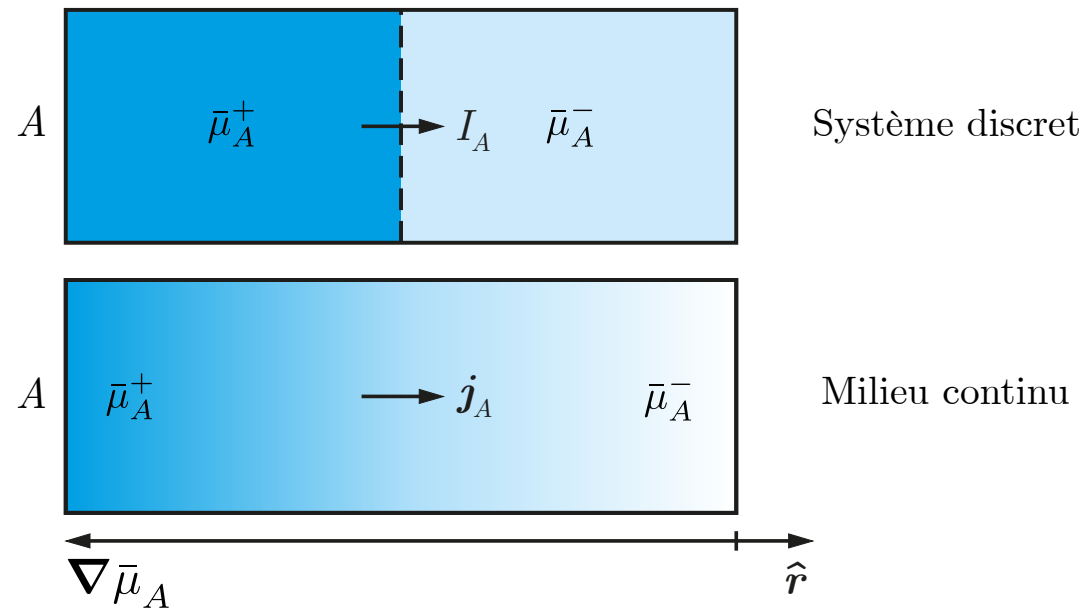
- **Densité de source d'entropie** : (13.82) et (13.87) dans (13.86)

(13.88)

- **Démarche** : on déduit la loi de Fick pour un milieu continu en se basant sur la loi de Fick (3.75) pour des sous-systèmes discrets.
- **Système** : deux sous-systèmes simples avec une seule substance électriquement chargée à température T et aux potentiels électrochimiques $\bar{\mu}_A^+$ et $\bar{\mu}_A^-$ séparés par une paroi diatherme, immobile et perméable.
- **Loi de Fick** : $\mu_A^+ \rightarrow \bar{\mu}_A^+$ et $\mu_A^- \rightarrow \bar{\mu}_A^-$

(3.75)

- ① Coefficient de diffusion électrochimique : F_A
- ② Aire de la paroi : A
- ③ Epaisseur de la paroi : ℓ
- **Formulation continue** : on considère que le système est inhomogène et que le potentiel électrochimique varie continument et linéairement du potentiel électrochimique maximal $\bar{\mu}_A^+$ à gauche au potentiel électrochimique minimal $\bar{\mu}_A^-$ à droite. Soit ℓ la longueur entre les deux extrémités du système et $\hat{r}$ le vecteur unitaire orienté de gauche à droite.



- **Gradient de potentiel électrochimique** : orienté sens croissant de $\bar{\mu}_A$
(13.89)

- **Densité de courant de substance** : orienté sens décroissant de $\bar{\mu}_A$
(13.90)

- **Loi de Fick** : continue (3.75) et (13.89) dans (13.90)

$$(13.91)$$

- **Source d'entropie :** (3.73)

$$(13.92)$$

- **Densité de courant de substance :** orienté sens décroissant de $\bar{\mu}_A$

$$\mathbf{j}_A = \frac{I_A}{A} \hat{\mathbf{r}} \quad (13.90)$$

- **Gradient de potentiel électrochimique :** orienté sens croissant de $\bar{\mu}_A$

$$\nabla \bar{\mu}_A = - \frac{\bar{\mu}_A^+ - \bar{\mu}_A^-}{\ell} \hat{\mathbf{r}} \quad (13.89)$$

- **Densité de source d'entropie :** (13.89) et (13.90) dans (13.92)

$$(13.93)$$

- **Démarche** : la loi de Fick discrète pour une substance électriquement chargée contient la loi d'Ohm discrète.
- **Système** : deux sous-systèmes simples constitués d'électrons de conduction (substance $A = e$) aux potentiels électrochimiques $\bar{\mu}_e^+$ et $\bar{\mu}_e^-$.
(13.94)

- **Potentiels électrochimiques** : la variation du potentiel chimique est négligeable par rapport à la variation du potentiel électrostatique
(13.95)

- **Loi de Fick** : (3.75) où $A = e$
(13.96)

- **Dérivée temporelle de la charge électrique** : courant électrique
(13.97)

- **Conductivité électrique** : électrons de conduction $A = e$
(13.98)

- **Courant électrique** : (13.96) et (13.98) dans (13.97)
(13.99)

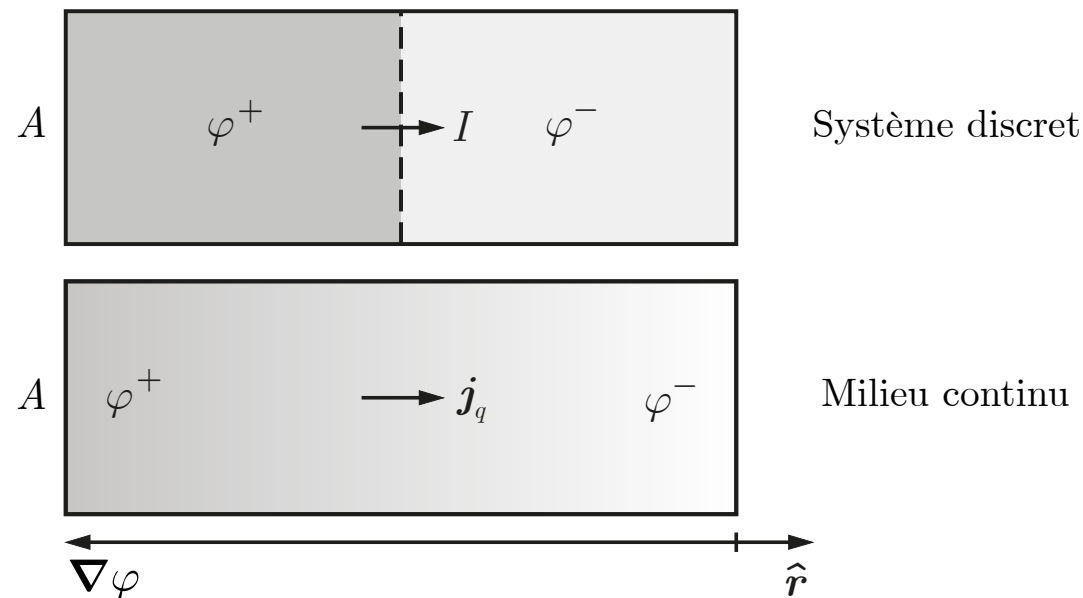
- **Loi d'Ohm** : discrète (tension)

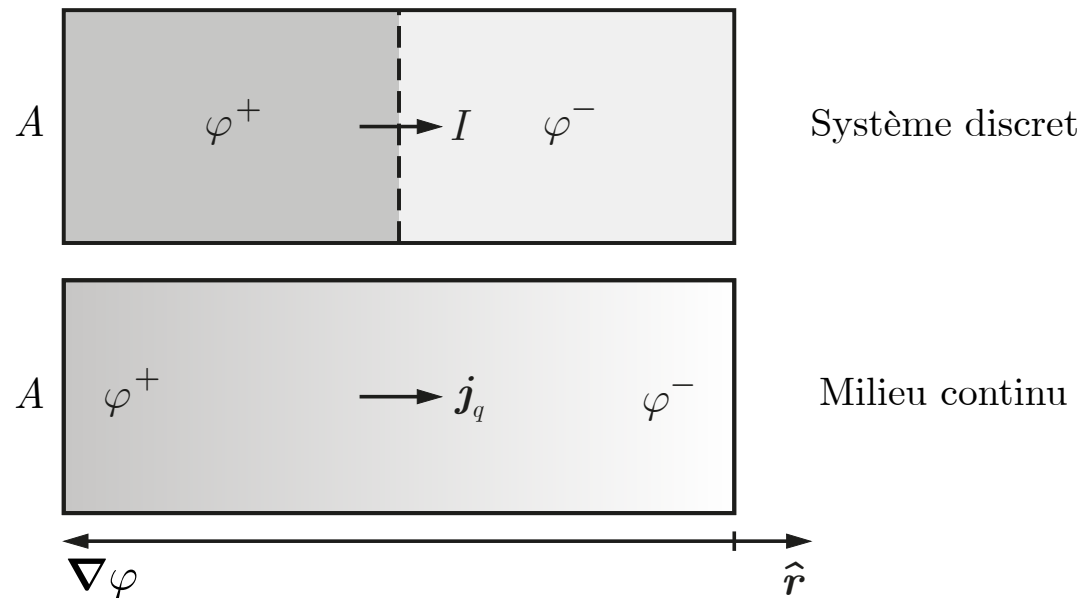
$$(13.100)$$

- ① Coefficient de conductivité électrique : σ
 - ② Coefficient de résistivité électrique : $\rho = \sigma^{-1}$
 - ③ Aire de la paroi : A
 - ④ Epaisseur de la paroi : ℓ
- **Résistance électrique** :

$$(13.101)$$

- **Formulation continue** : on considère que le système est inhomogène et que le potentiel électrostatique varie continument et linéairement du potentiel électrostatique maximal φ^+ à gauche au potentiel électrostatique minimal φ^- à droite. Soit ℓ la longueur entre les deux extrémités du système et $\hat{r}$ le vecteur unitaire orienté de gauche à droite.



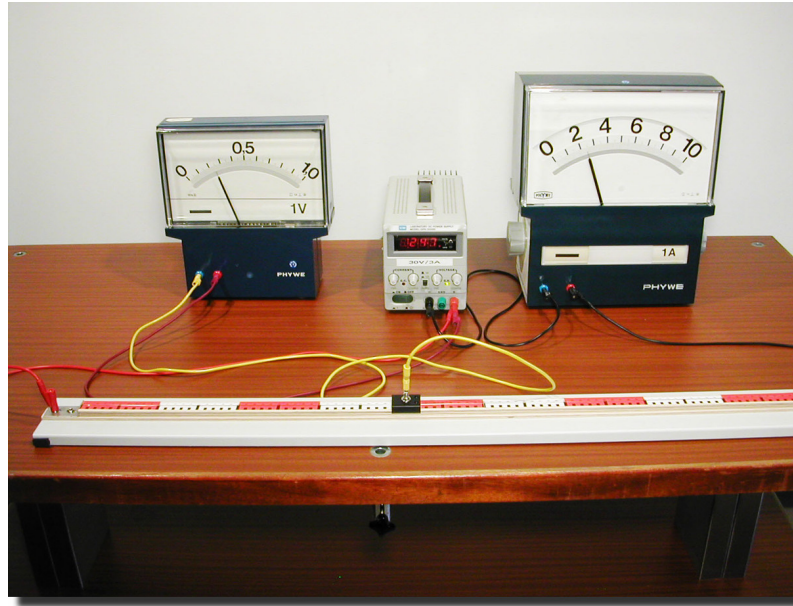


- **Gradient de potentiel électrostatique** : orienté sens croissant de φ
(13.102)

- **Densité de courant électrique** : orienté sens décroissant de φ
(13.103)

- **Loi d'Ohm** : continue (13.99) et (13.102) dans (13.103)

$$(13.104)$$



- ① On mesure le courant électrique I qui parcourt un fil à l'aide d'un ampèremètre branché en série avec le fil.
- ② On mesure la tension électrique $\nabla \varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ aux bornes du fil à l'aide d'un voltmètre branché en parallèle avec le fil.
- ③ On en déduit la résistance électrique R grâce à la loi d'Ohm (13.100).

$$U = \Delta \varphi = \varphi^+ - \varphi^- = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{A} I = \underbrace{\rho \frac{\ell}{A}}_{=R} I = RI$$

- **Démarche** : on déduit la loi de Stokes pour un milieu continu en se basant sur la loi de Stokes (3.48) pour un système homogène interagissant avec l'environnement.
- **Système** : un système avec une seule substance à température T et à pression p est séparé par une paroi diatherme, mobile et imperméable de l'environnement à pression p^{ext} .
- **Loi de Stokes** : discrète

(3.48)

- Coefficient de frottement thermoélastique : ξ
- Viscosité volumique et frottement interne :

(13.105)

- **Loi de Stokes** : discrète

(13.106)

- **Loi de Stokes** : discrète

$$\tau V = \eta \dot{V} \quad (13.106)$$

- **Volume** : représentation cartésienne

$$(13.107)$$

- **Courant de volume** : représentation cartésienne

$$(13.108)$$

- **Loi de Stokes** : discrète (13.107) et (13.108) dans (13.106)

$$(13.109)$$

- **Loi de Stokes** : continue

$$(13.110)$$

- **Source d'entropie :** (3.51)

$$\Sigma_S = \frac{1}{T} (p - p^{\text{ext}}) \dot{V} \geq 0 \quad (13.111)$$

- **Frottement interne :**

$$\tau = p - p^{\text{ext}} \quad (13.105)$$

- **Dérivée temporelle du volume :** représentation cartésienne

$$\dot{V} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx \, dy \, dz \quad (13.108)$$

- **Source d'entropie :**

$$(13.112)$$

- **Densité de source d'entropie :** (13.105) - (13.112) dans (13.111)

$$(13.113)$$

- **Système simple** : constitué de substances chimiques liées par n réactions chimiques d'affinité $\mathcal{A}_\alpha$ et de vitesse de réaction Ω_α .
- **Source d'entropie** :

$$(3.48)$$

- **Source d'entropie** :

$$\Sigma_S = \int_V \sigma_s dx dy dz \quad (13.112)$$

- **Vitesse de réaction chimique** :

$$(13.114)$$

- **Densité de source d'entropie** : (13.112) et (13.114) dans (3.48)

$$(13.115)$$

- **Système** : milieu continu constitué de r substances chimiques électriquement chargées liées par n réactions chimiques subissant des déformations irréversibles et des transferts irréversibles de chaleur et de matière.
- **Densités de source d'entropie** : processus irréversibles

① **Réactions chimiques :**

$$\sigma_s = \frac{1}{T} \sum_{a=1}^n \mathcal{A}_a \omega_a \geq 0 \quad (13.115)$$

② **Déformations : loi de Stokes**

$$\sigma_s = \frac{1}{T} \tau (\nabla \cdot \mathbf{v}) \geq 0 \quad (13.113)$$

③ **Transfert de chaleur : loi de Fourier**

$$\sigma_s = \frac{1}{T} \mathbf{j}_s \cdot (-\nabla T) \geq 0 \quad (13.88)$$

④ **Transfert de matière : loi de Fick** où $\bar{\mu}_A = \mu_A + q_A \varphi$

$$\sigma_s = \frac{1}{T} \sum_{A=1}^r \mathbf{j}_A \cdot (-\nabla \bar{\mu}_A) = \frac{1}{T} \sum_{A=1}^r \mathbf{j}_A \cdot (-\nabla \mu_A - q_A \nabla \varphi) \geq 0 \quad (13.93)$$

- **Densité de source d'entropie du milieu continu** : somme des densités de sources d'entropie dues aux processus quatre processus irréversibles qui ont lieu dans ce milieu continu.
 - ① Réactions chimiques
 - ② Déformations : loi de Stokes
 - ③ Transfert de chaleur : loi de Fourier
 - ④ Transfert de matière : loi de Fick

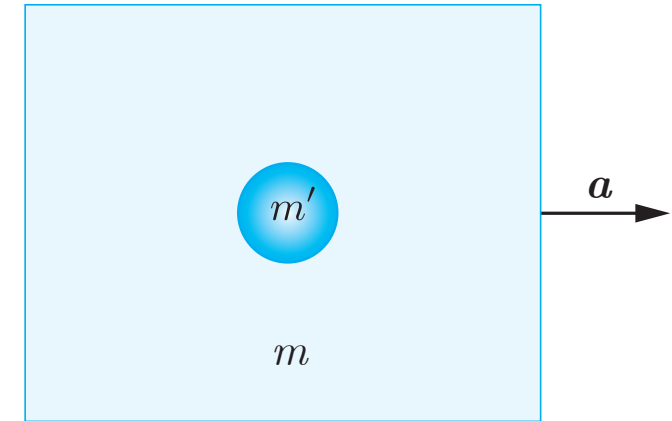
(13.116)

13.4 Applications

13.4.1 Force d'Archimède

13.4.2 Accéléromètre

- **Système** : un flotteur de densité de masse m' est immergé dans un récipient complètement rempli de liquide de densité de masse m où $m > m'$. Le récipient se déplace par rapport au sol avec une accélération constante a . Le liquide est au repos par rapport au récipient.



- **Théorème du centre de masse** : sans frottement

$$\sum \mathbf{f}^{\text{ext}} - \nabla p = m \mathbf{a} \quad (13.65)$$

- **Densité de force extérieure** : densité de poids dans le liquide

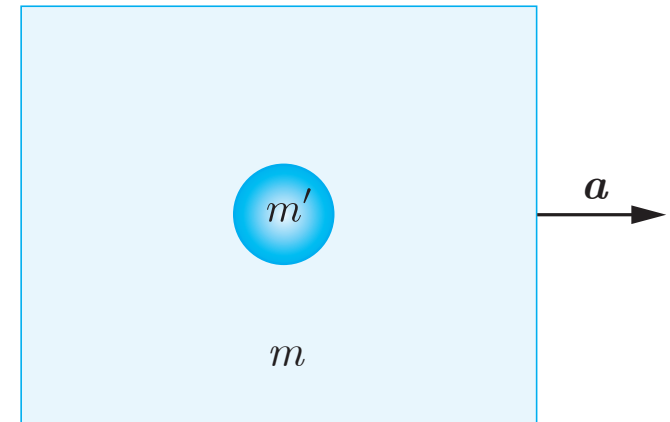
$$(13.117)$$

- **Gradient de pression** : (13.117) dans (13.65)

$$(13.118)$$

- **Force d'Archimède** : résultante des forces de pression exercée par le liquide sur la surface S du flotteur.

(13.119)



où $d\mathbf{A}$ est orienté du flotteur vers le liquide.

- **Théorème du gradient** : champ scalaire pression p

(13.120)

où V est le volume du flotteur.

- **Gradient de pression** :

$$\nabla p = m(g - a) \quad (13.118)$$

- **Force d'Archimède** : (13.118) dans (13.120) masse homogène m

(13.121)

- **Force d'Archimède** : (13.121) remise en forme

$$(13.122)$$

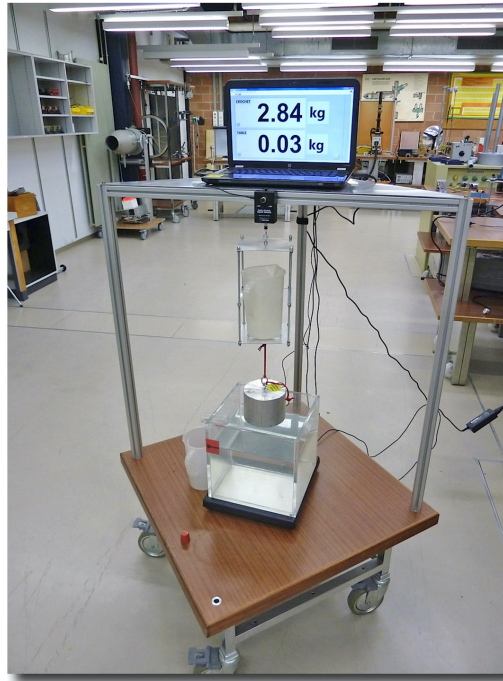
Dans un fluide accéléré, i.e. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, la force d'Archimède n'est pas verticale : elle est oblique.

- **Principe d'Archimède** : cas particulier : $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

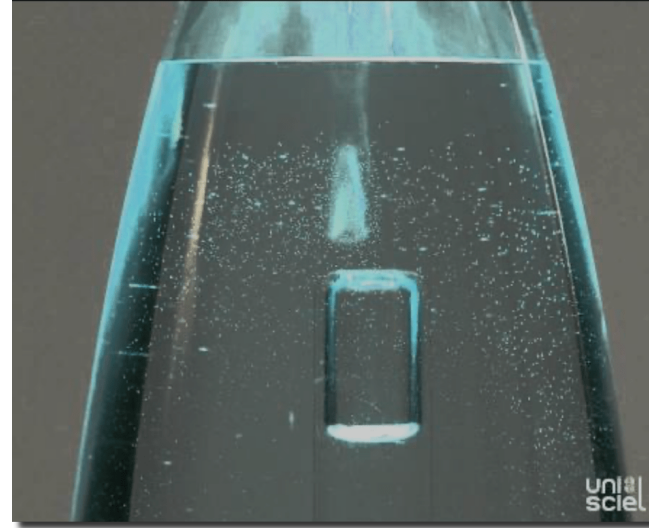
$$(13.123)$$

Dans un fluide au repos, i.e. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, la force d'Archimède est verticale et orientée vers le haut, et sa norme est égale au poids du fluide déplacé.

- **Accéléromètre** : on construit un accéléromètre en attachant un flotteur de densité de masse m' à un fil qui est retenu au fond d'un récipient complètement rempli de liquide de densité de masse m . Le récipient se déplace par rapport au sol avec une accélération constante $\mathbf{a}$. Le liquide et le flotteur sont au repos par rapport au récipient.



- 1 Un cylindre d'aluminium d'un litre est suspendu à une balance. La balance indique une masse de 2.8 kg.
- 2 En immergeant le cylindre dans l'eau, la masse apparente indiquée par la balance est 1.8 kg. La différence d'1 kg correspond à la masse d'un litre d'eau déplacée, c'est-à-dire la norme de la force d'Archimède divisée par la norme du champ gravitationnel.
- 3 En mettant alors le récipient dans lequel on a recueilli l'eau déplacée entre la balance et le cylindre d'aluminium, la masse indiquée par la balance est à nouveau de 2.8 kg.



- 1 Un cylindre ou une bouteille remplie d'eau renferme une figurine ou une éprouvette creuse contenant une poche d'air. Initialement, la masse volumique de la figurine ou de l'éprouvette est inférieure à celle de l'eau. La force d'Archimède exercée par l'eau est inférieure à son poids, elle se trouve donc au sommet du cylindre ou de la bouteille.
- 2 En appuyant sur le bouchon de la colonne ou en comprimant la bouteille, on comprime la poche d'air et on fait ainsi entrer plus d'eau dans la figurine ou dans l'éprouvette. Sa masse volumique devient alors supérieure à celle de l'eau. Ainsi, son poids surpasse la force d'Archimède et elle coule.

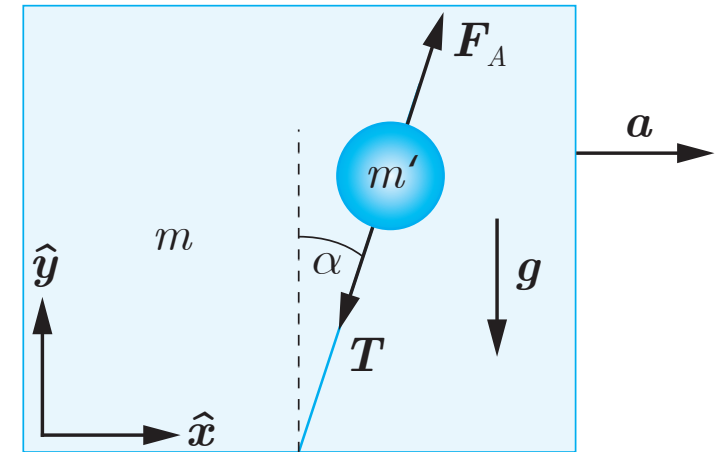
- **Objet** : flotteur homogène de masse M'

- **Forces extérieures** :

- ① **Poids** : $M'g$

- ② **Tension** : T

- ③ **Force d'Archimède** : F_A



- **Théorème du centre de masse** : flotteur

$$(13.124)$$

- **Masse** : flotteur homogène de densité m'

$$(13.125)$$

- **Force d'Archimède** :

$$F_A = -mV(g - a) \quad (13.126)$$

- **Tension** : dans le fil (13.124) où $m' < m$

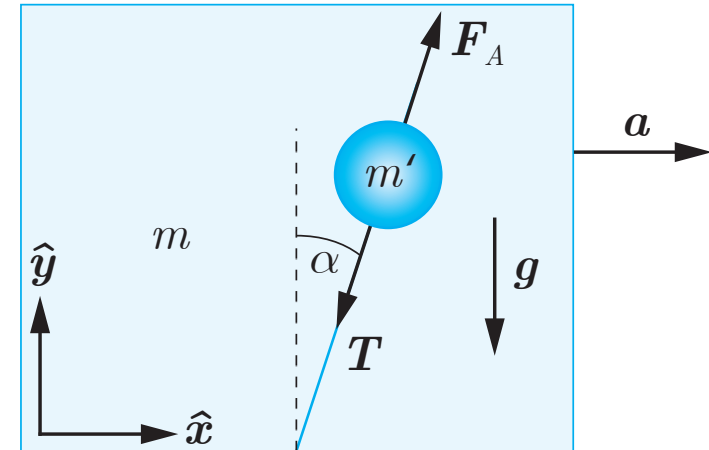
$$(13.127)$$

- **Tension** : dans le fil

$$T = (m - m') V (g - a) \quad (13.127)$$

- **Grandeurs vectorielles** : (13.128)

- ① Tension :
- ② Accélération :
- ③ Champ gravitationnel :



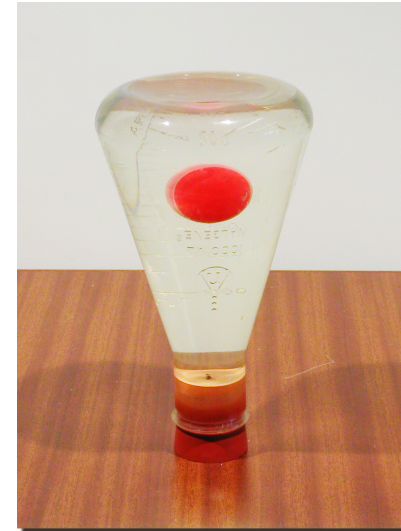
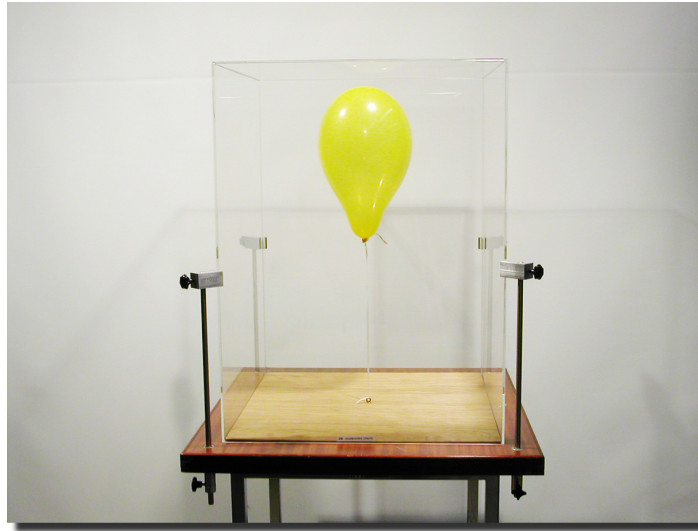
- **Tension** : composantes

$$(13.129)$$

- **Angle d'inclinaison du fil** :

$$(13.130)$$

Le flotteur s'incline vers la droite si $a > 0$ et vers la gauche si $a < 0$.



- 1 Un ballon rempli d'hélium, fixé au bout d'un fil, est attaché au sol d'un chariot. En accélérant le chariot vers la droite, il subit une force d'Archimède orientée obliquement vers la droite le long du fil. En freinant le chariot, il s'incline vers la gauche, car son accélération devient négative. En faisant tourner uniformément le chariot autour d'un axe fixe, la force d'Archimède est orientée obliquement vers l'intérieur du virage en raison de l'accélération centripète. L'angle d'inclinaison du fil permet de déterminer l'accélération du chariot.
- 2 Une balle en plastique est attachée par un fil au fond d'un récipient rempli d'eau. Lorsqu'on accélère le récipient, elle subit une force d'Archimède orientée le long du fil dans le sens du déplacement.